第13講　接線といえば

13

［A］　正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$（k は2以上の整数）の近似値を求めるため $f(x)=x^k-c$,

$g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $(x>0)$ とおき，$\sqrt[k]{c}<a_1$，$a_{n+1}=g(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする.

(1)　$\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ.

(2)　$k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ.

(3)　$k=3$，$c=2$，$a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5\cdot10^{16}}$ を示せ.

［B］　$e^{\pi}>22$ を示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　接線といえば

13　$\sin 1 < 0.85$ を示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　接線といえば

13

［A］　正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$（k は 2 以上の整数）の近似値を求めるため $f(x)=x^k-c$,

$g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $(x>0)$ とおき，$\sqrt[k]{c}<a_1$，$a_{n+1}=g(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする.

(1)　$\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ.

(2)　$k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ.

(3)　$k=3$，$c=2$，$a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5\cdot 10^{16}}$ を示せ.

［B］　$e^{\pi}>22$ を示せ.

【答】　略

【解説】

［A］ (1)　$f'(x)=kx^{k-1}$ より

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=a_n-g(a_n)\\&=a_n-\left(a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\right)\\&=\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\\&=\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}>0\ \ (\sqrt[k]{c}<a_n\text{ より})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n>a_{n+1}$$

また

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\sqrt[k]{c}&=\left(a_n-\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}\right)-\sqrt[k]{c}\\&=a_n-\sqrt[k]{c}-\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}\end{aligned}$$

ここで $\alpha>\beta>0$ のとき

$$\begin{aligned}&\alpha-\beta\\&=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1}}\\&=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha^{k-1}\left\{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\cdots+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{k-2}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{k-1}\right\}}\\&>\frac{\alpha^k-\beta^k}{k\alpha^{k-1}}\end{aligned}$$

であるから

$$a_{n+1}-\sqrt[k]{c}=a_n-\sqrt[k]{c}-\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}>0$$

$$\therefore\quad a_{n+1}>\sqrt[k]{c}$$

以上より，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$k=3$ のとき $a_{n+1}=a_n-\dfrac{{a_n}^3-c}{3{a_n}^2}$ より

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\sqrt[3]{c}&=a_n-\frac{{a_n}^3-c}{3{a_n}^2}-\sqrt[3]{c}\\&=(a_n-\sqrt[3]{c})\left(1-\frac{{a_n}^2+\sqrt[3]{c}\,a_n+\sqrt[3]{c^2}}{3{a_n}^2}\right)\\&=\frac{2a_n+\sqrt[3]{c}}{3{a_n}^2}(a_n-\sqrt[3]{c})^2\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{2x+\sqrt[3]{c}}{3x^2}=\frac{2}{3x}+\frac{\sqrt[3]{c}}{3x^2}$$

は $x>0$ の範囲で単調減少であるので，$a_n>\sqrt[3]{c}$ のとき

$$0<\frac{2a_n+\sqrt[3]{c}}{3{a_n}^2}<\frac{2\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c}}{3(\sqrt[3]{c})^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$$

であるので

$$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$$

(3)　(2)より

$$\begin{aligned}a_5-\sqrt[3]{2}&<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(a_4-\sqrt[3]{2})^2\\&<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3(a_3-\sqrt[3]{2})^4\\&<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^7(a_2-\sqrt[3]{2})^8\\&<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{15}(a_1-\sqrt[3]{2})^{16}\\&=\frac{1}{2^5}\cdot(1.3-\sqrt[3]{2})^{16}\end{aligned}$$

ここで $1.2^3=1.728$，$1.3^3=2.197$ より

$$1.2^3<2<1.3^3 \qquad \therefore\quad 1.2<\sqrt[3]{2}<1.3$$

ゆえに

$$0<1.3-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{10}$$

よって

$$a_5-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{2^5\cdot10^{16}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ $f(x)=e^x$ とおく．ここで $x=3$ における $y=f(x)$ の接線を $y=g(x)$ とおくと，
$f'(x)=e^x$ より $f'(3)=e^3$ なので，$g(x)=e^3(x-3)+e^3$ となる．
また $f'(x)=f''(x)=e^x>0$ より $y=f(x)$ は下に凸なグラフをもつので，$f(x)\geqq g(x)$（等号は $x=3$ のときだけ成立）となる．
$\pi\neq 3$ より $e^{\pi}=f(\pi)>g(\pi)$ が成立するが，$g(\pi)=e^3(\pi-2)>2.7^3(3.14-2)=22.43862$ となるので $e^{\pi}>22$ が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　接線といえば

13　$\sin 1 < 0.85$ を示せ.

【答】 略

【解説】

$f(x)=\sin x$ とおく．ここで $x=\dfrac{\pi}{3}$ における $y=f(x)$ の接線を $y=g(x)$ とおくと,

$f'(x)=\cos x$ より $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ なので, $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\dfrac{\pi}{3}$ つまり

$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるが, $0<x<\pi$ のとき $f''(x)=-\sin x<0$ より $y=f(x)$ は

上に凸なグラフをもつので, $f(x)\leqq g(x)$（等号は $x=\dfrac{\pi}{3}$ のときだけ成立）となる.

よって $\sin 1=f(1)<g(1)$ が成立するので, $\sin 1<g(1)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる.

このとき $g(1)<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3.14}{3}\right)+\dfrac{1.74}{2}=0.846\cdots$

となるので $\sin 1<0.85$ が示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。